Hilbert y la fecundidad matemática del método axiomático

Eduardo N. Giovannini
Conicet / Argentina
engiovannini@conicet.gov.ar

Abstract: In this note I shall point out that, from his first works on the foundations of geometry, Hilbert emphasized that his new formal axiomatic method should not be seen exclusively as a successful instrument to achieve a logically more rigorous and systematic presentation of preexistent mathematical theories. On the contrary, I shall argue that Hilbert constantly underscored, particularly in his unpublished notes for lecture courses, that the axiomatic method was a very fruitful mathematical tool, that not only could lead to new original results, but that basically inaugurated a new branch of mathematical research.
Key words: Hilbert; geometry; axiomatic method.

Resumen: El objetivo de esta nota es señalar que, desde sus primeros trabajos sobre los fundamentos de la geometría, Hilbert se ocupó de enfatizar que su nuevo método axiomático formal no debía ser entendido sólo como un instrumento eficaz para lograr una presentación más rigurosa lógicamente y sistemática de teorías matemáticas preexistentes. Por el contrario, sostendré que en este período inicial Hilbert destacó constantemente, especialmente en notas manuscritas de clases, que el método axiomático constituía una herramienta matemática sumamente fructífera, que no sólo podía conducir a nuevos resultados originales, sino que básicamente inauguraba una nueva área de investigación matemática.
Palabras claves: Hilbert; geometría; método axiomático.

Notae Philosophicae Scientiae Formalis,
vol. 2, n. 2, pp. 149 - 163, outubro 2013.

1. Introducción

La monografía *Fundamentos de la geometría* de David Hilbert (1862–1943), publicada originalmente en 1899, es considerada habitualmente una de sus contribuciones más importantes a los fundamentos de la matemática. Según se declara en la introducción del libro, el objetivo de la investigación es presentar un nuevo conjunto simple y completo de axiomas independientes entre sí para la geometría euclídea, y deducir de allí sus teoremas más importantes.[1] Por medio de su nuevo sistema de axiomas, Hilbert logró reconstruir íntegramente y de un modo riguroso el edificio de la geometría euclídea elemental. Con el término "riguroso" se alude a una serie de criterios fundamentales de este nuevo abordaje axiomático formal a la geometría: en primer lugar, la totalidad de los axiomas o principios debía ser establecida *explícitamente* desde un inicio, y nuevos postulados no podían ser asumidos durante el desarrollo de las demostraciones. En segundo lugar, el resto de las proposiciones o teoremas de la geometría debían ser obtenidos sobre la base de deducciones puramente lógicas, *i.e.*, sin apelar a ningún tipo de diagramas o construcciones diagramáticas en las demostraciones. Esta inmediata vinculación entre el método axiomático y la búsqueda de rigor en matemática es un rasgo mencionado explícitamente por Hilbert en su célebre conferencia de París "Problemas matemáticos" (1900). Asimismo, ésta es una de las características más enfatizadas a la hora de describir la nueva concepción axiomática formal de Hilbert, tal como fue presentada por primera vez en *Fundamentos de la geometría*. Por ejemplo, Klein señala lo siguiente, en una caracterización que podría denominarse estándar:

[1] Cf. Hilbert 1899, p. 1.

> La formulación [axiomática] abstracta es absolutamente apropiada para la elaboración de las demostraciones, pero claramente no es apropiada para el descubrimiento de nuevas ideas y métodos, más bien, constituye la culminación de un desarrollo previo. (Klein 2006, p. 434)

En esta nota sostendré que, contrariamente a la opinión de Klein, desde un inicio Hilbert rechazó la idea de que su nuevo método axiomático formal consistía exclusivamente en un instrumento muy eficiente para alcanzar un grado de mayor abstracción, rigor y sistematización en la presentación de teorías matemáticas preexistentes. Por el contrario, intentaré mostrar que Hilbert se preocupó constantemente por resaltar que el método axiomático constituía una herramienta matemática sumamente fructífera o fecunda, que no sólo podía conducir a nuevos resultados y descubrimientos, sino que básicamente inauguraba una nueva área de investigación matemática. Si bien la fecundidad matemática del método axiomático puede reconocerse inmediatamente en *Fundamentos de la geometría*, señalaré que ésta fue una de las características más enfatizadas por Hilbert en sus notas manuscritas para cursos sobre geometría, correspondientes a esta etapa inicial de sus investigaciones sobre los fundamentos de la matemática.

2. El nuevo método axiomático antes de *Fundamentos de la geometría*

Las primeras investigaciones axiomáticas de Hilbert en el campo de la geometría euclídea consisten en un conjunto de notas de clases para un curso dictado en el semestre de invierno de 1893/1894.[2] Este primer abordaje axiomático estuvo profundamente influenciado por el libro *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882) de Moritz Pasch (1843–1930), que Hilbert había estudiado especialmente para la elaboración de su curso. La influencia se percibe claramente en la postura empirista que adopta Hilbert respecto de las bases epistemológicas de la geometría y la naturaleza del conocimiento geométrico. Asimismo, el sistema de axiomas para

[2] Sobre el origen de estas notas véase Majer y Hallett (2004).

la geometría euclídea propuesto en este curso guarda grandes similitudes con los axiomas presentados por primera vez por Pasch, así como también con la posición "deductivista" que adopta tempranamente Hilbert en relación al modo de llevar a cabo las demostraciones en geometría, a saber: las demostraciones geométricas deben proceder estrictamente de un modo puramente deductivo sobre la base de los axiomas, y sin hacer ninguna referencia a diagramas o figuras geométricas.[3]

En cuanto a su concepción axiomática, en este primer curso Hilbert presenta ya las ideas fundamentales de su nueva concepción abstracta del método axiomático. En primer lugar, rechaza explícitamente la utilización de definiciones descriptivas *à la Euclides* de los objetos primitivos del sistema como puntos, líneas y planos. Por el contrario, en su nueva presentación axiomática de la geometría euclídea el primer paso consiste en suponer la existencia de un conjunto de objetos cualesquiera, cuyas únicas propiedades matemáticas relevantes son las relaciones establecidas en los axiomas. En segundo lugar, y como una consecuencia de lo anterior, declara que su sistema axiomático no debe ser entendido como una descripción directa o inmediata del espacio físico, sino más bien como un 'esquema de conceptos', capaz de recibir diversas interpretaciones.[4] En otras palabras, en este curso inicial advierte que, de acuerdo con su nueva concepción del método axiomático, la relación entre su teoría geométrica axiomatizada y la 'realidad' acontece a través de interpretaciones o 'aplicaciones' [*Deutungen*].

Sin embargo, lo que todavía está ausente en esta primera investigación axiomática es quizás la contribución más original de Hilbert en esta etapa temprana de sus trabajos sobre los fundamentos de la matemática, a saber: la perspectiva *metateórica*, o sea, las investigaciones *metageométricas*. En este primer abordaje axiomático a la geometría no encontramos una investigación sistemática de la consistencia, y sobre todo de la independencia, de los axiomas geométricos por

[3] Cf. Pasch 1882, p. 98 y Hilbert 1894, p. 75.
[4] Cf. Hilbert 1894, p. 104.

medio del procedimiento de la construcción de "modelos" aritméticos, tal como se presentan en *Fundamentos de la geometría*. Las investigaciones metageométricas aparecerán en cambio un poco después, en un curso que Hilbert dictó en el semestre de invierno de 1898/1899, y que luego utilizó para la elaboración de la primera edición de su célebre monografía.[5] Es quizás por esta razón que en este período bien inicial Hilbert consideraba la perspectiva axiomática como en cierto modo estéril desde un punto de vista matemático. Esta opinión la encontramos en una carta dirigida a su amigo y colega Adolf Hurwitz (1859–1919):

> Por cierto, mi curso sobre los axiomas de la geometría no me ha resultado, por lo menos hasta ahora, para nada edificante. Siempre lo mismo: si se debe tomar esto o aquello como axioma; siempre el mismo tono insípido, sin la vívida frescura de nuevos resultados. (Hilbert a Hurwitz, 13 de junio de 1894)[6]

Como veremos en lo que sigue, Hilbert mudó su opinión rápidamente.

3. La fecundidad del método axiomático

El próximo curso que Hilbert dedicó a la geometría fue en el semestre de invierno de 1898/1899. Este curso reviste una importancia fundamental, ya que fue la base para la redacción final de la primera edición de *Fundamentos de la geometría.*[7] En este curso la concepción axiomática formal se encuentra ya completamente consolidada. Sin embargo, la diferencia fundamental respecto del curso anterior es que ahora el nuevo espíritu metamatemático se halla plenamente desarrollado. Por ejemplo, en estas notas Hilbert presenta una descripción incluso más detallada que en *Fundamentos de la geometría* de cómo la teoría de los números reales podía ser utilizada para construir diversas realizaciones o "modelos"

---

[5] Véase Hilbert 1898a y 1898b.
[6] Citado en Toepell 1986, p. 100.
[7] En adelante llamaremos *Festschrift* a la primera edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899).

analíticos de los axiomas geométricos, y así probar la independencia de una proposición geométrica – un axioma o un teorema – respecto de un determinado conjunto de principios. La técnica de la construcción de “modelos", según es entendida y practicada por Hilbert en las investigaciones metageométricas presentadas en este curso, consistía básicamente en traducir uno u varios grupos de axiomas geométricos dentro de otra teoría matemática, *i.e.*, la teoría de los números reales. Para ser más precisos, Hilbert comienza a utilizar aquí, como se volverá después habitual en su monografía, un sub–cuerpo pitagórico (numerable) de los números reales. Esta traducción consistía en redefinir los conceptos geométricos básicos como ‘punto’, ‘línea’, ‘congruencia’, en términos de la teoría de los números reales. Es decir, este método coincidía con el procedimiento estándar de la geometría analítica, en donde se proporcionaban, sobre la base de un sistema adecuado de coordenadas, nuevas definiciones de estos términos primitivos.

Luego, en este curso Hilbert explota esta nueva perspectiva, presentando incluso novedosos resultados metageométricos que luego no fueron incluidos en el *Festschrift*.[8] Es interesante observar así que estas novedosas investigaciones y los resultados alcanzados cambiaron el modo en que Hilbert concibió en un primer momento la *función y utilidad* del método axiomático. Sin duda, el método axiomático era una herramienta eficaz para alcanzar un grado de rigor hasta el momento inimaginable en la presentación de la geometría elemental. No sólo el sistema de axiomas que elabora Hilbert permitía evitar “lagunas” en las demostraciones, sino que su presentación axiomática formal evitaba la intromisión de la “intuición geométrica” en el desarrollo de las demostraciones. Más aún, por medio de su presentación de la geometría como un sistema axiomático formal, esta teoría se convirtió por primera vez en una *teoría matemática pura*, un hecho que fue reconocido inmediatamente y señalado como uno de sus principales logros. Sin embargo, para Hilbert las investigaciones metageométricas constituían un aspecto

[8] Algunos de estos resultados son analizados en (Hallett 2008).

fundamental, en donde se percibía en cambio el carácter matemáticamente fructífero del método axiomático. Es dable notar que esta característica fue enfatiza por Hilbert constantemente a partir de la aparición de *Fundamentos de la geometría*.

Uno de los lugares en donde Hilbert resalta con más énfasis la fecundidad matemática del método axiomático es en un curso titulado *Logische Principien des mathematischen Denkens*, dictado en 1905. Este curso podría identificarse como la exposición más acabada del método axiomático formal en esta etapa temprana de sus trabajos sobre los fundamentos. En particular, Hilbert reflexiona detalladamente respecto de la naturaleza del método axiomático formal y de su significado para la matemática en general. La primera parte del texto está dedicada a reproducir sus sistemas de axiomas para la aritmética de los reales y para la geometría euclídea, y a resumir algunos de los resultados más importantes alcanzados previamente. Sin embargo, tras presentar el sistema de axiomas para la geometría, Hilbert dedica más de 30 páginas de su curso a resaltar el valor de su nuevo método axiomático para la matemática en general; en particular, advierte que la peculiar fecundidad del método axiomático se aprecia fácilmente en la geometría:

> El provecho más grande del método axiomático aparece asimismo en la geometría, en tanto que él suscita un gran número de nuevas e importantes preguntas, a las que difícilmente se podría llegar de otro modo. (Hilbert 1905 p. 70)

Para aclarar la naturaleza de esta nueva clase de preguntas, y de ese modo para ilustrar la fecundidad matemática del método axiomático abstracto, Hilbert se refiere en primer lugar a sus investigaciones en torno a los célebres teoremas de Desargues y Pappus (o Pascal).[9] Si bien la importancia de estos teoremas para la

[9] Teorema de Desargues: sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos que yacen en un mismo plano; si las líneas AA', BB' y CC' son concurrentes, los puntos de intersección de los lados correspondientes de los dos triángulos están alineados, y recíprocamente.

geometría proyectiva era claramente reconocida hacia el último tercio del siglo XIX, existía sin embargo una controversia muy extendida en torno a cuáles eran los postulados o principios mínimos necesarios para su demostración. Más precisamente, en tanto que ambos teoremas trataban exclusivamente de las propiedades de incidencia de puntos y líneas en el plano y en el espacio, resultaba deseable encontrar una demostración que utilice exclusivamente medios proyectivos, o sea, que no recurra a los axiomas de congruencia. En el caso del teorema de Desargues, una demostración puramente proyectiva podía ser fácilmente obtenida si uno se situaba en el espacio.[10] Sin embargo, la misma técnica no podía ser utilizada para demostrar el teorema de Pascal, con lo cual Hilbert se plantea la pregunta respecto de *si es posible* probar en su sistema este último teorema utilizando sólo axiomas de incidencia (I), orden (II) y el axioma de las paralelas (IV). La respuesta que Hilbert proporciona en el capítulo 6 de *Fundamentos de la geometría* es que *no es posible*.[11] Para ello utiliza un cuerpo numérico no conmutativo para construir una realización aritmética de una geometría no–pascaliana, es decir, una geometría en la que se cumplen los axiomas I, II y IV, pero no el teorema de Pascal. Luego, es interesante señalar que Hilbert advierte en este curso que este tipo de preguntas por la *imposibilidad* de probar cierta proposición o teorema a partir de un conjunto determinado de axiomas no sólo fue lo que lo condujo a adoptar su nuevo abordaje axiomático formal a la geometría, sino que además constituye el ejemplo más claro de la *importancia y fecundidad matemática* de este tipo de investigaciones:

> En la pregunta acerca de qué significa esta demostración [de la imposibilidad] surgió la necesidad de definir con mayor rigor los medios

---

Teorema de Pascal: Sean, respectivamente, *A, B, C*, y *A', B', C'* dos ternas de puntos situados sobre dos rectas que se cortan y distintos de todos ellos del punto de intersección; si *CB'* es paralela a *BC'* y *CA'* es paralela a a *AC',* también *BA'* es paralela a *AB'.*

[10] Sobre las distintas demostraciones posibles del teorema de Desargues véase Arana y Mancosu (2012).

[11] Cf. (Hilbert 1899, teoremas 36 y 37).

> auxiliares [*Hilfsmittel*], y ello sólo fue posible a través de la construcción de un sistema de axiomas completo para la geometría; esta pregunta particular me reveló por primera vez que una axiomatización precisa de la geometría de ningún modo es algo poco fructífero y carente de interés, sino que más bien es de una inmensa importancia para la matemática. (Hilbert 1905, p. 73)

Contrariamente a la imagen del método axiomático representada por ejemplo por Klein, Hilbert destaca aquí su enorme importancia no sólo como un modo de garantizar el rigor en la presentación de una teoría matemática, sino como una herramienta muy eficaz para alcanzar nuevos y originales resultados. En este sentido, Hilbert presenta además otro ejemplo muy interesante del tipo de investigaciones a las que arribamos sólo gracias nuevo método axiomático, pero que sin embargo no es incluido en *Fundamentos de la geometría*.

4. El axioma de congruencia de triángulos y el teorema del triángulo isósceles

El último ejemplo de la fecundidad matemática del método axiomático que propone Hilbert está vinculado con sus investigaciones en torno al axioma de congruencia de triángulos. Como es bien sabido, en el sistema de Hilbert el axioma III.6 de congruencia de triángulos, que reúne condiciones sobre la congruencia lineal y la congruencia de ángulos, garantiza *directamente* el criterio de congruencia lado-ángulo-lado de triángulos. Ello obedece a su estrategia de formular los axiomas de congruencia (III) de un modo neutral o abstracto, es decir, sin hacer ningún tipo de referencia al *movimiento* de cuerpos rígidos o a argumentos de superposición, como por ejemplo el argumento utilizado por Euclides para probar la proposición I.4. En la primera edición de *Fundamentos* dicho axioma (III 6) reza así:

> Si dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ se cumplen las congruencias
>
> $$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$
>
> entonces se cumplen también siempre las congruencias

$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$. (Hilbert 1899, p. 12)

Ahora bien, en el curso recién mencionado, y más detalladamente en un artículo incorporado posteriormente como un apéndice en *Fundamentos de la geometría*, Hilbert se plantea una serie de interrogantes respecto de este axioma de congruencia de triángulos, alcanzando resultados sumamente interesantes.[12] Brevemente, Hilbert observa que este axioma tal como es formulado en *Fundamentos de la geometría* no hace ningún tipo de referencia a la *orientación* de los triángulos en el plano, de modo que podría ser así considerado como *versión general* [weitere Fassung] del axioma. Esta versión del axioma garantiza entonces que dos triángulos, cuyas combinación lado—ángulo—lado coinciden, podrán ser determinados como congruentes sin importar su orientación en el plano. Sin embargo, es posible formular una *versión restringida* [engere Fassung] del axioma, que establezca que para que las condiciones de congruencia se cumplan los triángulos deben tener además la misma orientación en el plano (Figura 1).[13]

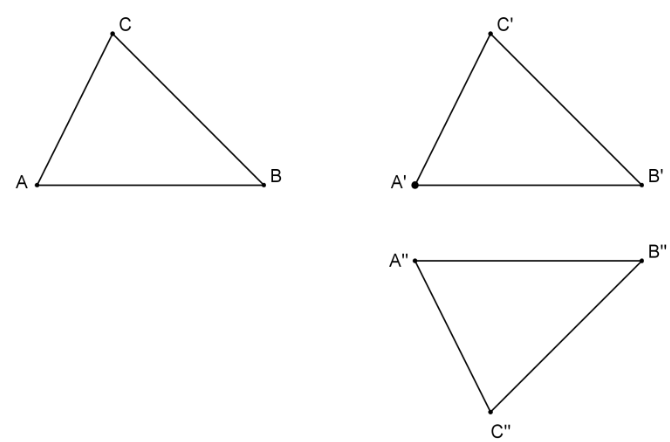

Figura 1: Hilbert 1905, p. 87.

[12] Cf. Hilbert 1903.

[13] Sobre la definición de *orientación* o *sentido* de un triángulo, véase (Hilbert 1903). En el diagrama que introduce Hilbert en su curso, *ABC* y *A'B'C'* poseen el mismo sentido, mientras que *A''B''C''* posee una orientación diferente.

Hilbert se pregunta entonces si la versión general del axioma no contiene en realidad una condición superflua, y por lo tanto puede ser reemplazada en su sistema axiomático por la versión restringida; en otras palabras, se pregunta si la versión general no puede ser obtenida de la versión restringida – junto con los demás axiomas – como una consecuencia lógica. Luego, esta pregunta desembocó en una investigación muy fructífera respecto del teorema clásico de la igualdad de los ángulos de la base de un triángulo isósceles, que arrojó además resultados notables.[14] El teorema del triángulo isósceles (TTI) afirma que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales o, equivalentemente, que en un triángulo cuyos ángulos de la base son iguales, los lados opuestos a los ángulos iguales son iguales. Se trata de un teorema elemental de la geometría euclídea, que aparece tempranamente en libro I de los *Elementos* como la proposición 5. En los *Elementos*, la prueba del TTI se basa en el criterio lado—ángulo—lado de congruencia para triángulos, que es probado en la proposición anterior (I.4) utilizando los controvertidos argumentos de "superposición", que suponen la posibilidad del movimiento rígido de los cuerpos en el espacio. En el sistema axiomático de Hilbert el teorema puede ser demostrado muy fácilmente utilizando los axiomas de I–III (incidencia, orden, congruencia), dado que el axioma de congruencia de triángulos garantiza por sí mismo este primer criterio de congruencia de triángulos. Sin embargo, Hilbert se plantea el problema de determinar si también es posible demostrar el TTI utilizando la *versión restringida* del axioma de congruencia de triángulos – junto con el resto de los axiomas de congruencia, incidencia y orden. Los resultados de estas de estas investigaciones metageométricas resultan fascinantes desde el punto de vista de la estructura de la geometría euclídea elemental.

En primer lugar, Hilbert prueba que el TTI *no* puede ser demostrado a partir de la *versión restringida* del axioma de congruencia, y el resto de los axiomas I–IV. Sin embargo, la demostración es posible si además de los axiomas anteriores se

[14] Este teorema no es mencionado en *Fundamentos de la geometría*.

asume la validez de dos axiomas de continuidad, en particular, el axioma de Arquímedes y un nuevo postulado que Hilbert llama "axioma de vecindad" [*Axiom der Nachbarschaft*].[15] Luego, para probar que ambos axiomas son esenciales para demostrar el TTI – suponiendo que se adopta la versión restringida del axioma de congruencia –, Hilbert construye una serie de "modelos analíticos" de los axiomas geométricos que, además de mostrar la independencia de ambos axiomas, arrojan resultados en cierto modo insospechados.[16] En particular, Hilbert construye un "modelo" en el que se cumplen todos los axiomas I – III con la versión restringida del axioma de congruencia de triángulos y el axioma de vecindad, pero *no* el axioma de Arquímedes. Sin embargo, Hilbert descubre además que en este modelo *no se cumplen i)* el TTI, *ii)* la propiedad euclídea de triángulos[17] y *iii*) la teoría del área de los triángulos.[18] Estos resultados metageométricos resultan así muy relevadores en tanto contribuyen a esclarecer la estructura lógica de la geometría euclídea elemental. En efecto, el modelo (no-arquimediano) que construye Hilbert muestra que la versión general del axioma de congruencia de triángulos es *esencial* si queremos garantizar muchas propiedades fundamentales de la geometría euclídea – como la propiedad euclídea de triángulos, la teoría de área e incluso el TTI – *sin presuponer la validez de ningún axioma de continuidad*. Finalmente, concluye Hilbert, estos resultados sólo pudieron ser alcanzados en virtud del tipo de investigaciones propiciadas por el método axiomático (abstracto):

> De este modo observamos que en el sistema euclídeo construido propiamente, en el cual podemos prescindir de las condiciones de continuidad, el axioma general de congruencia es un componente necesario. Las investigaciones que he presentado aquí arrojan nueva luz sobre las conexiones entre el teorema del triángulo isósceles y muchas

[15] Axioma de vecindad: dado un segmento cualquiera *AB*, existe siempre un triángulo en cuyo interior no puede hallarse un segmento congruente con AB.
[16] Cf. Hilbert 1903. Un análisis de estos resultados se encuentra en Hallett 2008.
[17] Hilbert denomina *propiedad euclídea del triángulo* a la proposición I.20 de los *Elementos*: "En todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante".
[18] Hilbert identifica a la proposición I.39 de los *Elementos* como el teorema fundamental de la teoría euclídea del área de triángulos.

> otras proposiciones de la geometría elemental, y dan lugar a diversas observaciones interesantes. *Sólo el método axiomático pudo habernos conducido a tales cosas*. (Hilbert 1905, pp. 86–87. El énfasis es mío).

Aunque los diversos resultados originales alcanzados en *Fundamentos de la geometría* bastan por sí mismos para dar cuenta del carácter matemáticamente fructífero del método axiomático[19], hemos podido observar que una tarea importante que emprendió Hilbert en sus cursos fue enfatizar precisamente esta fecundidad, en su opinión un elemento fundamental de su nueva concepción axiomática. Quizás esta reacción fue motivada por el modo en que inicialmente fue recibida esta nueva concepción, en donde se destacaba casi exclusivamente el nivel de abstracción y rigor inusitado exhibido en su presentación de la geometría. Un claro ejemplo de este tipo de lectura es la conocida recensión de Poincaré (1902), en donde se compara al método axiomático de Hilbert con una máquina de razonamiento como el piano lógico de Stanley Jevons, cuya única finalidad era la obtención mecánica de teoremas a partir de un conjunto cualquiera de axiomas.[20] En contraposición a esta imagen sesgada, hemos visto que Hilbert se preocupó por resaltar la fecundidad matemática del método axiomático; quizás ello fue en cierta medida necesario, en tanto que en un primer momento no resultó completamente claro para todos que con su libro Hilbert había inaugurado una nueva área de investigación en matemáticas: la matemática de los axiomas o metamatemática.

Bibliografía

[19] Un resumen muy preciso de los resultados originales más importantes de *Fundamentos de la geometría*, como así también de las investigaciones que suscitaron, puede consultarse en Pambuccian (2013).

[20] Cf (Poincaré 1902, pp. 252-253).

ARANA, A. y MANCOSU, P. (2012): “On the Relationship between plane and solid Geometry”, *The Review of Symbolic Logic*, 5 (2), pp. 294–353.

HALLETT, M. (2008): “Reflections on the Purity of Method in Hilbert’s Grundlagen der Geometrie”, en P. Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, New York, Oxford University Press, pp. 198–255.

HEATH, TH. L. (1956): *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*. 3 Vols. New York, Dover Publications, 2º edición.

HILBERT, D. (1894): “Die Grundlagen der Geometrie”; (MS. Vorlesung, WS 1893/4), en Mayer y Hallett (2004).

HILBERT, D. (1898a): “Grundlagen der Euklidischen Geometrie”; (MS. Vorlesung, WS 1898/9), en Mayer y Hallett (2004).

HILBERT, D. (1898b): “Elemente der Euklidischen Geometrie”, en Mayer y Hallett (2004).

HILBERT, D. (1899): *Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*, Leipzig, Teubner. Reimpreso en U. MAJER & M. HALLETT (2004).

HILBERT, D. (1903): Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 35, pp. 50-67.

HILBERT, D. (1905): *Logische Principien des mathematischen Denkens*; (*MS. Vorlesung, SS 1905)*. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Georg–August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal.

KLEIN, F. (2006): *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*, Madrid, Crítica.

MAJER, U. Y HALLETT, M. (Eds.), 2004, *David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, Berlin, Springer Verlag.

PAMBUCCIAN, V. (2013): [Review]. David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902, *Philosophia mathematica*, 21 (2), pp. 255–275.

PASCH, M. (1882): *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, Teubner.

POINCARÉ, H. (1902): [Review]. Hilbert. Les Foundaments de la Géométrie, *Bulletin des sciences mathemátiques. Deuxième serie*, 26, pp- 249-272.

TOEPELL, M. (1986): *Über die Entstehung von David Hilberts Grundlagen der Geometrie*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.